b) Déduire de la question **1°) b)** que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_2$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

5°) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

a) Montrer que pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t+t\ln(t)} \leq f(t)$

b) Montrer alors que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\ln(1+\ln x) \leq F(x) \leq \ln x$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6°) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h: x \mapsto x - F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.